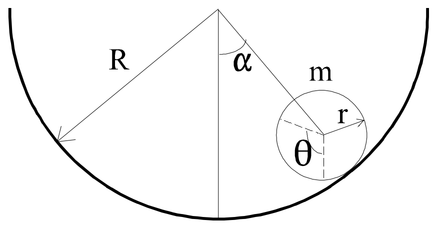
TENTAMEN MECHANICA AN-1A 14 augustus 1997 tijd van 9:30 - 12:30 uur

MAAK ELKE OPGAVE OP EEN APART VEL, voorzien van je **naam**.
Op vel 1: **studentnummer**, **naam**, **adres**, **postkode**, **woonplaats** en **studierichting**.
De onderdelen van de opgaven zijn veelal onafhankelijk van elkaar op te lossen. Ook al kun je een bepaald onderdeel niet oplossen, **probeer dan toch het vervolg** van de opgave.

Opgave 1. cijfer = (Σ punten)/3 + 1

In een bolvormige kom met straal R rolt een kogel **zonder te slippen**. Als de verbindingslijn van het middelpunt van de kogel met het middelpunt van de goot over een hoek α draait, draait de kogel zelf om z'n eigen as over een hoek θ. De kogel heeft een massa m en een straal r.



1 a. Geef het verband tussen de hoeken α en θ.

1 b. Bereken de potentiële energie van de kogel als functie van α.

2 c. Bereken de kinetische energie van de kogel als functie van de hoeksnelheid $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$. In de gevraagde uitdrukking komen θ en $\frac{d\theta}{dt}$ dus niet - meer - voor.
[NB, mocht je het traagheidsmoment van een kogel tov een as door het middelpunt niet meer weten, doe hiervoor dan een zinvolle aanname.]

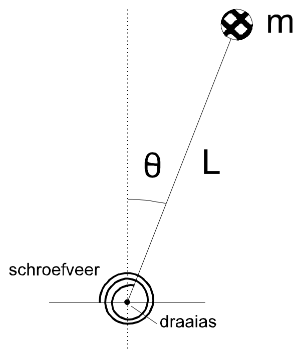
3 d. Stel aan de hand van de Lagragiaan de bewegingsvergelijking voor de kogel op.

Om de kogel zonder slippen te laten rollen is een wrijvingskracht F_w tussen de kogel en de kom nodig.

2 e. Bereken de wrijvingskracht F_w als functie van de hoek α.

Opgave 2.

Een dunne, starre staaf met lengte L is vertikaal opgesteld en aan de onderkant door middel van een schroefveer vastgemaakt. Als bovenaan de staaf een kracht F wordt uitgeoefend, wordt de staaf over een - kleine - hoek θ uit z'n vertikale stand gebracht. Er blijkt dan te gelden: $F = CL\theta$; C is de veerkonstante.
Bovenaan de staaf wordt een massa m bevestigd. Afhankelijk van de waarden van m, C en L bevindt de massa zich voor $\theta = 0$ in een stabiel dan wel labiel evenwicht.



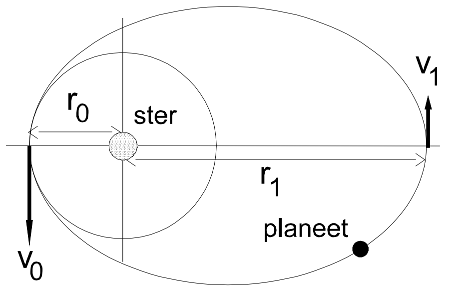
1 a. Bereken de kinetische energie van de massa, uitgedrukt in de hoeksnelheid $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$

2 b. Bereken de potentiële energie van het massa-veer systeem als functie van θ.

3 c. Leidt de bewegingsvergelijking voor het massa-veer systeem af en laat met behulp daarvan zien dat het systeem voor $\theta = 0$ een stabiel evenwicht heeft als $\frac{mg}{CL} < 1$.

3 d. Bereken de periode T van de trilling uitgedrukt in m, C en L als de massa voor $\theta = 0$ een stabiel evenwicht heeft en daar omheen **kleine** bewegingen maakt.

Opgave 3.



Een planeet met massa m draait in een cirkelvormige baan met straal r_0 om een ster met massa M. In zeer korte tijd (veel korter dan de periode van de planeet om de ster) verliest de ster, door een bolsymmetrische explosie, een deel van z'n massa zodat deze vermindert tot M' = μM (μ < 1). De planeet wordt echter niet door de explosie aangetast.

2 a. <u>Bereken</u> de totale energie E_0 van de planeet vóór het exploderen van de ster uitgedrukt in m, M en r_0.

2 b. <u>Bereken</u> de totale energie E' van de planeet nadat de ster is geëxplodeerd uitgedrukt in E_0 en μ.

Door de afname van de massa van de ster gaat de planeet een ellipsvormige baan beschrijven.

1 c. <u>Bereken</u> de kinetische energie van de planeet in het verst verwijderde punt, op een afstand r_1 van de ster, uitgedrukt in E_0, r_0 en r_1.

2 d. <u>Bereken</u> de verhouding $\rho = \frac{r_0}{r_1}$, uitgedrukt in μ.

2 e. <u>Laat zien</u> dat de planeet het sterrenstelsel verlaat als de ster de helft of meer van z'n massa verloren heeft (dus als μ < 0,5).

1a. $R\alpha = r(\alpha + \theta)$

b. $U = -mg(R-r)\cos\alpha$

c. $T = \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}m\frac{(R-r)^2}{r^2}\dot{\alpha}^2 = \frac{7}{10}m(R-r)^2\dot{\alpha}^2$

d. Uit $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{\partial L}{\partial \alpha}$ volgt: $\frac{7}{5}m(R-r)\ddot{\alpha} = -mg(R-r)\sin\alpha$ en: $\ddot{\alpha} + \frac{5}{7}\frac{g}{R-r}\sin\alpha = 0$

e. $N = F_w r = I\ddot{\theta} = \frac{2}{5}mr^2\frac{(R-r)}{r}\ddot{\alpha}$ zodat $F_w = \frac{2}{7}mg\sin\alpha$

2a. $T = \frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2$

b. $U = mgL\cos\theta + \frac{1}{2}C(L\theta)^2$

c. Uit $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$ volgt: $mL^2\ddot{\theta} = mgL\sin\theta - CL^2\theta$ zodat $\ddot{\theta} = -\frac{C}{m}(\theta - \frac{mg}{CL}\sin\theta)$

stabiel evenwicht: er moet een terugdrijvende kracht zijn;
voor $\theta > 0$ moet $\ddot{\theta} < 0$ en voor $\theta < 0$ moet $\ddot{\theta} > 0$
voor $\theta > 0$ en $\frac{mg}{CL} < 1$ volgt: $\theta - \frac{mg}{CL}\sin\theta > \theta - \sin\theta > 0$ en dus $\ddot{\theta} < 0$
idem voor $\theta < 0$ geldt $\ddot{\theta} > 0$

d. kleine hoeken: $\sin\theta \approx \theta$ zodat: $\ddot{\theta} = -\frac{C}{m}(1 - \frac{mg}{CL})\theta$

dit is de vergelijking voor een harmonische trilling met hoekfrequentie: $\omega = \sqrt{\frac{C}{m}(1 - \frac{mg}{CL})}$

de periode is dan: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{C(1 - \frac{mg}{CL})}}$

3a. $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM}{r_0}$ met $G\frac{mM}{r_0^2} = \frac{mv_0^2}{r_0}$ volgt

$E_0 = \frac{1}{2}G\frac{mM}{r_0} - G\frac{mM}{r_0} = -\frac{1}{2}G\frac{mM}{r_0}$

b. $E' = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM'}{r_0} = \frac{1}{2}G\frac{mM}{r_0} - G\frac{m\mu M}{r_0} = G\frac{mM}{2r_0}(1-2\mu) = E_0(2\mu - 1)$

c. Uit behoud van impulsmoment volgt: $v_0 r_0 = v_1 r_1$ zodat: $\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\frac{r_0^2}{r_1^2} = -E_0\frac{r_0^2}{r_1^2}$

d. $E_0(2\mu - 1) = E' = \frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{m\mu M}{r_1} = -E_0\frac{r_0^2}{r_1^2} + 2E_0\mu\frac{r_0}{r_1} = E_0(2\mu\frac{r_0}{r_1} - \frac{r_0^2}{r_1^2})$

stel $\frac{r_0}{r_1} = \rho$
dan volgt
$2\mu - 1 = 2\mu\rho - \rho^2 \rightarrow \rho^2 - 1 - 2\mu(\rho - 1) = 0 \rightarrow (\rho - 1)(\rho + 1 - 2\mu) = 0$

zodat $\rho = 1$ (vervalt) of $\rho = 2\mu - 1 = \frac{E'}{E_0}$

e. methode I:
De totale energie na de explosie is $E' = E_0(2\mu - 1)$ zodat voor $\mu < 0,5$ de factor $(2\mu - 1)$ negatief

wordt. Daar E_0 negatief is (gebonden toestand), wordt voor μ < 0,5 de totale energie E' positief. Er is nu voldoende energie voor de planeet om oneindig ver weg te komen.

methode II:

voor de excentriciteit geldt: $\rho = \frac{r_0}{r_1} = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \frac{1 - \rho}{1 + \rho} = \frac{1 - 2\mu + 1}{1 + 2\mu - 1} = \frac{1 - \mu}{\mu}$

voor μ < 0,5 volgt dan dat $\varepsilon > 1$ dit is een hyperbolische baan: de planeet keert niet meer terug.